Über die Größenordnung der Partialsummen der Entwicklung integrierbarer Funktionen nach W-Systemen

Von FERENC SCHIPP in Budapest

Einleitung

Es sei $\{\varphi_n(t)\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ ein im Intervall $[0, 1]$ definiertes Funktionensystem mit

(1) $$|\varphi_n(t)| \equiv 1 \qquad (t \in [0, 1];\ n=0, 1, 2, \ldots),$$

ferner sei $\{\psi_n(t)\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ das von $\{\varphi_n(t)\}$ erzeugte W-System. D. h., es ist $\psi_0(t) \equiv 1$, und für

(2) $$n = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_s} \qquad (\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_s \geqq 0)$$

ist

(3) $$\psi_n(t) = \varphi_{\nu_1}(t)\varphi_{\nu_2}(t) \ldots \varphi_{\nu_s}(t).$$

Wir nehmen an, daß das System $\{\varphi_n(t)\}$ stark-multiplikativ orthogonal ist, d. h. daß das System $\{\psi_n(t)\}$ orthogonal ist. [1])

Wir bezeichnen mit

(4) $$S_n(t; f) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_\nu(t) \left(\int_0^1 f(u)\psi_\nu(u)\, du \right)$$

die n-te Partialsumme der nach dem orthogonalen System $\{\psi_n(t)\}$ fortschreitenden Fourier-Entwicklung von $f(t)$.

In dieser Arbeit werden wir den folgenden Satz beweisen.

Satz. *Es sei* $\{\lambda_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *eine positive, monoton nicht abnehmende Zahlenfolge mit* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, $\lambda_n = o(\log\log n)$. *Dann existiert eine Funktion* $f(t) \in L[0, 1]$ *derart, daß überall im Intervall* $[0, 1]$

(5) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(t; f)|}{\lambda_n} > 0$$

besteht.

---

[1]) Siehe ALEXITS [1], S. 165.

Unser Satz gibt eine Verschärfung eines Satzes von E. STEIN ([5], Satz 7.), nach dem eine Funktion $f(t) \in L[0, 1]$ existiert, die eine fast überall divergente Walsh-Entwicklung besitzt.

Durch Anwendung der Beispiele von KOLMOGOROFF ([3], [4]) hat YUNG-MING CHEN [6] einen analogen Satz für Fourierreihen bewiesen.

Zuerst beweisen wir das Analogon für $\{\psi_n(t)\}$ des grundlegenden Lemmas in der Kolmogoroffschen Konstruktion.

Lemma. *Für jede Zahl $k(=1, 2, 3, \ldots)$ kann man ein W-Polynom*

$$P_k(t) = \sum_{\nu=0}^{2^{2^{2k+1}}-1} a_\nu^{(k)} \psi_\nu(t)$$

und eine Folge $\{H_n^{(2k-1)}\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots, 2^{2k}-1)$ von meßbaren Mengen mit den folgenden Eigenschaften angeben:

a) $H_n^{(2k-1)} \cap H_{n'}^{(2k-1)} = \emptyset \quad (n \neq n'), \qquad \bigcup_{n=0}^{2^{2k}-1} H_n^{(2k-1)} = [0, 1];$

b) $P_k(t) \geqq 0 \qquad (t \in [0, 1]);$

c) $\int_0^1 P_k(t)\, dt = 1;$

d) *für* $n = 0, 1, 2, \ldots, 2^{2k}-1$ *und* $t \in H_n^{(2k-1)}$ *gilt* $|S_\mu(t; P_k)| \geqq \frac{k}{3} - 1,$

wobei $\mu = 2^{2^{2k}+n} + \sum_{\nu=0}^{k} 2^{2\nu}$ *gesetzt wird.*

§ 1. Bezeichnungen

Es sei $\{r_n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ das Rademachersche System, d. h.

$$r_0(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq x < \frac{1}{2}), \\ -1 & (\frac{1}{2} \leqq x < 1), \end{cases} \quad r_0(x+1) = r_0(x), \tag{1.1}$$

$$r_n(x) = r_0(2^n x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist bekannt, daß die Funktionen $r_n(x)$ im Interwall [0, 1] stark-multiplikativ orthogonal sind und das von ihnen erzeugte W-System das bekannte Walshsche Orthogonalsystem ist, dessen Elemente wir mit $W_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ bezeichnen.

Es sei $x=0, x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} \ldots$ die dyadische Entwicklung der Zahl $x \in [0, 1)$, wobei wir festsetzen, daß für $x=p2^{-q}$ alle x_i $(i \geqq q+1)$ gleich 0 sind. Dann gilt

$$r_n(x) = (-1)^{x_{n+1}}. \tag{1.2}$$

Im Folgenden bedeutet R die Menge der dyadisch rationalen Zahlen in [0, 1). FINE [2] hatte die folgende Operation in R eingeführt: es sei

$$x \dot{+} y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \tag{1.3}$$

für

$$x=0, x_1 x_2 \dots x_n \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, \quad y=0, y_1 y_2 \dots y_n \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}.$$

Es ist leicht zu verifizieren, daß R mit dieser Operation eine Abelsche Gruppe ist, und daß die Relationen

(1. 4) $$x \dotplus x = 0, \quad W_n(x \dotplus y) = W_n(x) W_n(y) \qquad (x, y \in R;\ n=0, 1, 2, \dots)$$

gelten.

Wir bezeichnen mit G die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen. In der Menge G führen wir eine Operation $\oplus$ folgenderweise ein:

(1. 5) $$k \oplus l = \sum_{\nu=0}^{\infty} |k_\nu - l_\nu| 2^\nu$$

für

$$k = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu 2^\nu, \quad l = \sum_{\nu=0}^{\infty} l_\nu 2^\nu \qquad (k_\nu, l_\nu = 0, 1).$$

Offensichtlich wird G mit der Operation $\oplus$ zu einer Abelschen Gruppe und die nichtnegativen ganzen Zahlen, die kleiner als 2^n sind, bilden eine Untergruppe G_n von G von der Ordnung 2^n, wobei noch

(1. 6) $$\frac{k}{2^n} \dotplus \frac{l}{2^n} = \frac{k \oplus l}{2^n}$$

besteht.

§ 2. Hilfssätze

Zur Konstruktion der Funktion $P_k(t)$ werden wir einige Hilfssätze benutzen.

Hilfssatz I. *Es sei* $n = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \dots + 2^{\nu_s}$ $(\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_s \geqq 0)$ *und*

(2. 1) $$D_n(t; x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_\nu(t) W_\nu(x).$$

Dann gilt

(2. 2) $$D_n(t; x) = \psi_n(t) W_n(x) \sum_{j=1}^{s} \varphi_{\nu_j}(t) r_{\nu_j}(x) D_{2^{\nu_j}}(t; x).$$

Beweis von Hilfssatz I. Es sei $m = 2^k + m'$ mit $0 < m' \leqq 2^k$. Wenn $\nu < 2^k$ ist, dann folgt aus (3) $\psi_{2^k+\nu}(t) W_{2^k+\nu}(x) = \varphi_k(t) r_k(x) \psi_\nu(t) W_\nu(x)$, und so gilt

$$D_m(t; x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \psi_\nu(t) W_\nu(x) =$$

(2. 3) $$= \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \psi_\nu(t) W_\nu(x) + \sum_{\nu=0}^{m'-1} \psi_{2^k+\nu}(t) W_{2^k+\nu}(x) =$$

$$= D_{2^k}(t; x) + \varphi_k(t) r_k(x) \sum_{\nu=0}^{m'-1} \psi_\nu(t) W_\nu(x) = D_{2^k}(t; x) + \varphi_k(t) r_k(x) D_{m'}(t; x).$$

Speziell für $m'=2^k$ ergibt sich

$$D_{2^{k+1}}(t;x)=\big(1+\varphi_k(t)r_k(x)\big)D_{2^k}(t;x)=\prod_{\nu=0}^{k}\big(1+\varphi_\nu(t)r_\nu(x)\big)\geqq 0$$

(2. 4)

$$(k=0,1,2,\ldots;\quad t\in[0,1];\quad x\in R).$$

Mit der Benutzung dieser Formeln zeigen wir (2. 2) mit Induktion. Ist $n=2^k$ ($k=0,1,2,\ldots$), dann folgt (2. 2) auf Grund von (1):

$$D_{2^k}(t;x)=\psi_{2^k}(t)W_{2^k}(x)\{\varphi_k(t)r_k(x)D_{2^k}(t;x)\}.$$

Wir nehmen an, daß (2. 2) schon für alle Zahlen $n'\leqq 2^k$ bewiesen ist. Wir zeigen, daß sie auch für n ($2^k<n<2^{k+1}$) besteht. Es sei $n=2^k+n'$. Ist $n'=2^{\nu_1}+2^{\nu_2}+\ldots+2^{\nu_s}$, ($k>\nu_1>\ldots>\nu_s\geqq 0$), dann ergibt sich aus (2. 3) und der Induktionsannahme

$$D_n(t;x)=D_{2^k}(t;x)+\varphi_k(t)r_k(x)D_{n'}(t;x)=$$

$$=D_{2^k}(t;x)+\varphi_k(t)r_k(x)\psi_{n'}(t)W_{n'}(x)\left\{\sum_{j=1}^{s}\varphi_{\nu_j}(t)r_{\nu_j}(x)D_{2^{\nu_j}}(t;x)\right\}.$$

Da für $\nu<k$

$$\varphi_\nu(t)r_\nu(x)\prod_{j=0}^{k-1}\big(1+\varphi_j(t)r_j(x)\big)=\sum_{j=0}^{k-1}\big(1+\varphi_j(t)r_j(x)\big)=D_{2^k}(t;x)$$

gilt, erhalten wir schließlich

$$D_n(t;x)=$$

$$=\varphi_k(t)r_k(x)\psi_{n'}(t)W_{n'}(x)\left\{\varphi_k(t)r_k(x)D_{2^k}(t;x)+\sum_{j=1}^{s}\varphi_{\nu_j}(t)r_{\nu_j}(x)D_{2^{\nu_j}}(t;x)\right\}=$$

$$=\psi_n(t)W_n(x)\{\varphi_k(t)r_k(x)D_{2^k}(t;x)+\varphi_{\nu_1}(t)r_{\nu_1}(x)D_{2^{\nu_1}}(t;x)+\ldots+$$

$$+\varphi_{\nu_s}(t)r_{\nu_s}(x)D_{2^{\nu_s}}(t;x)\},$$

womit (2. 2) bewiesen ist.

Hilfssatz II. *Es seien*

(2. 5) $$E_\nu^{(0)}=\{t\colon t\in[0,1],\ \varphi_\nu(t)=1\},\ E_\nu^{(1)}=\{t\colon t\in[0,1],\ \varphi_\nu(t)=-1\}$$

$$(\nu=0,1,2,\ldots).$$

Für $0\leqq n<2^{k+1}$ *und* $n=\sum_{\nu=0}^{k}n_\nu 2^{k-\nu}$ $(n_\nu=0,1)$ *sei*

(2. 6) $$H_n^{(k)}=\bigcap_{\nu=0}^{k}E_\nu^{(n_\nu)}\quad(n=0,1,\ldots 2^{k+1}-1;\quad k=0,1,\ldots).$$

Dann bestehen

(2. 7) $$H_n^{(k)}\cap H_{n'}^{(k)}=\emptyset\quad(n\neq n'),\qquad\bigcup_{n=0}^{2^{k+1}-1}H_n^{(k)}=[0,1],$$

und

(2. 8) $$r_s\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right)\varphi_s(t)D_{2^s}\left(t;\frac{n}{2^{k+1}}\right)=2^s\qquad(t\in H_n^{(k)};\quad 0\leqq s<k+1).$$

Beweis von Hilfssatz II. Die Relationen (2. 7) ergeben sich leicht aus $E_\nu^{(0)} \cup E_\nu^{(1)} = [0, 1]$ und $E_\nu^{(0)} \cap E_\nu^{(1)} = \emptyset$.

Zum Beweis von (2. 8) führen wir die Zahlen

$$N(j; n) = \sum_{\nu=0}^{j} n_\nu 2^{j-\nu} \qquad (j=0, 1, 2, \ldots, k)$$

ein. Dann besteht offenbar $N(k; n) = n$, und

$$\frac{n}{2^{k+1}} = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{n_\nu}{2^{\nu+1}}, \qquad \frac{N(j; n)}{2^{j+1}} = \sum_{\nu=0}^{j} \frac{n_\nu}{2^{\nu+1}}.$$

Daraus auf Grund von (1. 2), (2. 4), (2. 5) und (2. 6) folgt, daß für $0 \leqq j \leqq k$

$$\text{(2. 9)} \qquad \begin{aligned} D_{2^{j+1}}\left(t; \frac{n}{2^{k+1}}\right) &= D_{2^{j+1}}\left(t; \frac{N(j; n)}{2^{j+1}}\right) = \\ &= \prod_{l=0}^{j} (1 + (-1)^{n_l} \varphi_l(t)) = \begin{cases} 2^{j+1}, & \text{wenn} \quad t \in H_{N(j; n)}^{(j)}, \\ 0, & \text{wenn} \quad t \notin H_{N(j; n)}^{(j)} \end{cases} \end{aligned}$$

gilt, [2]) ferner

$$H_{N(j; n)}^{(j)} = \bigcap_{\nu=0}^{j} E_\nu^{(n_\nu)} = E_j^{(n_j)} \cap \left(\bigcap_{\nu=0}^{j-1} E_\nu^{(n_\nu)}\right) = E_j^{(n_j)} \cap H_{N(j-1; n)}^{(j-1)},$$

also $H_{N(j; n)}^{(j)} \subset H_{N(j-1; n)}^{(j-1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Beachten wir, daß nach (1. 2) und (2. 4) für $t \in E_j^{(n_j)}$ $r_j\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right) \varphi_j(t) = (-1)^{n_j} \varphi_j(t) = 1$ gilt und $E_j^{(n_j)} \supset H_n^{(k)}$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$, so bekommen wir aus (2. 9) für $j + 1 = s$ die zu bewiesende Gleichung (2. 8).

Hilfssatz III. *Es sei*

$$\text{(2. 10)} \qquad A_n^{(k)} = \frac{n}{2^{2k}} + \frac{\delta_n^{(k)}}{2^{2k+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, 2^{2k} - 1; \quad k = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei die Folge $\delta_n^{(k)}$ $(=0, 1)$ *durch die unteren rekursiven Formeln definiert wird:*

$$\text{(2. 11)} \qquad \begin{cases} \delta_0^{(1)} = 1, \quad \delta_1^{(1)} = \delta_2^{(1)} = \delta_3^{(1)} = 0; \\ \delta_0^{(k+1)} = 1, \quad \delta_1^{(k+1)} = \delta_2^{(k+1)} = \delta_3^{(k+1)} = 0; \\ \delta_{4j}^{(k+1)} = \delta_{4j+1}^{(k+1)} = \delta_j^{(k)}; \\ \delta_{4j+2}^{(k+1)} = \delta_{4j+3}^{(k+1)} = \delta_j^{(k)} \oplus 1 \end{cases}$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{2k} - 1; \quad k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es seien weiterhin

$$\text{(2. 12)} \qquad m_k = \sum_{\nu=0}^{k} 2^{2\nu} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

---

[2]) Es folgt aus (2. 9) für $j = k$, wenn man noch $\int_0^1 D_{2^{k+1}}\left(t; \frac{n}{2^{k+1}}\right) dt = 1$ beachtet, daß $|H_n^{(k)}| = 2^{-(k+1)}$, wobei $|H_n^{(k)}|$ das Lebesguesche Maß von $H_n^{(k)}$ bedeutet.

und

$$U_k(t;x) = \sum_{n=0}^{2^{2k}-1} \varphi_{2k}(t) r_{2k}(x \dotplus A_n^{(k)}) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_n^{(k)}),$$

(2. 13)

$$V_k(t;x) = \frac{2}{3} \psi_{m_k}(t) W_{m_k}(x) \left\{ \sum_{\nu=0}^{k} (2^{2\nu}-1) \varphi_{2(k-\nu)}(t) r_{2(k-\nu)}(x) D_{2^{2(k-\nu)}}(t;x) \right\}$$

$$(x \in R; \quad t \in [0, 1]; \quad k = 1, 2, 3, \dots).$$

Dann besteht

(2. 14) $$U_k(t; x) = V_k(t; x) \qquad (k = 1, 2, 3, \dots; \; x \in R; \; t \in [0, 1]).$$

Beweis von Hilfssatz III. Der Beweis wird durch Induktion in Bezug auf k geführt. Aus den Definitionen der $A_n^{(k)}$ und m_k folgt mit Hilfe von (1. 4)

$$U_1(t;x) = \sum_{n=0}^{3} \varphi_2(t) r_2(x \dotplus A_n^{(1)}) =$$

$$= \varphi_2(t) r_2(x) \left\{ r_2\left(\frac{1}{2^3}\right) + r_2\left(\frac{1}{2^2}\right) + r_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + r_2\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = 2\varphi_2(t) r_2(x),$$

$$V_1(t;x) = \frac{2}{3} \varphi_2(t) \varphi_0(t) r_2(x) r_0(x) \{(2^2-1) \varphi_0(t) r_0(x)\} = 2\varphi_2(t) r_2(x),$$

der Satz ist also für $k = 1$ richtig.

Wir nehmen an, daß für einen Index $k (\geqq 1)$ $U_k(t; x) = V_k(t; x)$ $(x \in R, \; t \in [0, 1])$ gilt. Mittels (1. 2) und (2. 11) ergibt sich durch einfacher Rechnung, daß immer, wenn nicht $i = 1, j = 0$ sind, die Gleichung

$$r_{2k+2}(A_{4j+i}^{(k+1)}) r_{2k}(A_{4j+i}^{(k+1)}) = r_{2k}(A_j^{(k)})$$

(2. 15)

$$(j = 0, 1, 2, \dots, 2^{2k}-1; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad i = 0, 1, 2, 3)$$

besteht und im Falle $i = 1, j = 0$

(2. 16) $$r_{2k+2}(A_1^{(k+1)}) r_{2k}(A_1^{(k+1)}) = -r_{2k}(A_0^{(k)}) \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

gilt, weiterhin für alle natürlichen Zahlen $s (< 2k)$

$$r_s(A_{4j+i}^{(k+1)}) = r_s(A_j^{(k)}) \qquad (j = 0, 1, 2, \dots, 2^{2k}-1; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad i = 0, 1, 2, 3).$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt, daß im Falle $l \leqq 2^{2k}$

$$D_l(t; x \dotplus A_{4j+i}^{(k+1)}) = D_l(t; x \dotplus A_j^{(k)})$$

(2. 17)

$$(j = 0, 1, 2, \dots, 2^{2k}-1; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad i = 0, 1, 2, 3)$$

ist. Mit Hilfe von (1. 4), (2. 3) und (2. 15) ergibt sich — wenn nicht $i = 1, j = 0$ sind — die folgende Gleichung:

$$r_{2k+2}(x \dotplus A_{4j+i}^{(k+1)}) D_{m_k}(t; x \dotplus A_{4j+i}^{(k+1)}) = r_{2k+2}(x) r_{2k+2}(A_{4j+i}^{(k+1)}) \cdot$$

$$\cdot \{ D_{2^{2k}}(t; x \dotplus A_{4j+i}^{(k+1)}) + \varphi_{2k}(t) r_{2k}(x \dotplus A_{4j+i}^{(k+1)}) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_{4j+i}^{(k+1)}) \} =$$

$$= r_{2k+2}(x) \{ r_{2k+2}(A_{4j+i}^{(k+1)}) D_{2^{2k}}(t; x \dotplus A_j^{(k)}) + \dotplus \varphi_{2k}(t) r_{2k}(x \dotplus A_j^{(k)}) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_j^{(k)}) \}$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, 2^{2k}-1; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad i = 0, 1, 2, 3),$$

woraus auf Grund der Gleichung

$$r_{2k+2}(A_{4j+i}^{(k+1)}) = r_{2k+2}\left(\frac{\delta_{4j+i}^{(k+1)}}{2^{2k+3}}\right) = \begin{cases} r_{2k}\left(\frac{\delta_j^{(k)}}{2^{2k+1}}\right) & (i=0,1), \\ -r_{2k}\left(\frac{\delta_j^{(k)}}{2^{2k+1}}\right) & (i=2,3) \end{cases}$$

die Beziehung

$$\sum_{i=0}^{3} \varphi_{2k+2}(t) r_{2k+2}(x \dotplus A_{4j+i}^{(k+1)}) D_{m_k}(t; x \dotplus A_{4j+i}^{(k+1)}) =$$
$$= 4\varphi_{2k+2}(t) r_{2k+2}(x) \{\varphi_{2k}(t) r_{2k}(x \dotplus A_j^{(k)}) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_j^{(k)})\}$$

folgt. Daraus ergibt sich, daß

$$U_{k+1}(t;x) = \sum_{j=0}^{2^{2k}-1} \sum_{i=0}^{3} \varphi_{2k+2}(t) r_{2k+2}(x \dotplus A_{4j+i}^{(k+1)}) D_{m_k}(t; x \dotplus A_{4j+i}^{(k+1)}) =$$
$$= 4\varphi_{2k+2}(t) r_{2k+2}(x) \sum_{j=0}^{2^{2k}-1} \varphi_{2k}(t) r_{2k}(x \dotplus A_j^{(k)}) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_j^{(k)}) -$$
$$- 4\varphi_{2k+2}(t) r_{2k+2}(x) \varphi_{2k}(t) r_{2k}(x \dotplus A_0^{(k)}) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_0^{(k)}) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{3} \varphi_{2k+2}(t) r_{2k+2}(x \dotplus A_i^{(k+1)}) D_{m_k}(t; x \dotplus A_i^{(k+1)}) = s_1 + s_2 + s_3$$

besteht. Da auf Grund von (1. 4), (2. 3), (2. 10), (2. 11), (2. 16) und (2. 17)

$$s_3 = \varphi_{2k+2}(t) r_{2k+2}(x) \cdot$$
$$\cdot \sum_{i=0}^{3} r_{2k+2}(A_i^{(k+1)}) \cdot \{D_{2^{2k}}(t; x \dotplus A_0^{(k)}) + \varphi_{2k}(t) r_{2k}(x \dotplus A_i^{(k+1)}) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_0^{(k)})\} =$$
$$= 2\varphi_{2k+2}(t) r_{2k+2}(x) \{D_{2^{2k}}(t; x \dotplus A_0^{(k)}) + \varphi_{2k}(t) r_{2k}(x \dotplus A_0^{(k)}) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_0^{(k)})\}$$

gilt, bekommen wir aus (1. 4), (2. 3) und (2. 13), auf Grund der Induktionsannahme, daß

$$U_{k+1}(t;x) = 2\varphi_{2k+2}(t) r_{2k+2}(x) \cdot$$
$$\cdot \{2U_k(t;x) + D_{2^{2k}}(t; x \dotplus A_0^{(k)}) - \varphi_{2k}(t) r_{2k}(x \dotplus A_0^{(k)}) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_0^{(k)})\} =$$
$$= 2\varphi_{2k+2}(t) r_{2k+2}(x) \{2V_k(t;x) + D_{2^{2k}}(t;x) + \varphi_{2k}(t) r_{2k}(x) D_{m_{k-1}}(t;x)\} =$$
$$= 2\varphi_{2k+2}(t) r_{2k+2}(x) \{2V_k(t;x) + D_{m_k}(t;x)\}$$

ist. Benutzt man die Gleichungen (2. 2) und (2. 13), so ergibt sich

$$U_{k+1}(t;x) =$$
$$= \frac{2}{3} \psi_{m_{k+1}}(t) W_{m_{k+1}}(x) \left\{ \sum_{\nu=0}^{k} (2^{2\nu+2} - 4) \varphi_{2(k-\nu)}(t) r_{2(k-\nu)}(x) D_{2^{2(k-\nu)}}(t;x) + \right.$$
$$\left. + 3 \sum_{\nu=0}^{k} \varphi_{2(k-\nu)}(t) r_{2(k-\nu)}(x) D_{2^{2(k-\nu)}}(t;x) \right\} =$$
$$= \frac{2}{3} \psi_{m_{k+1}}(t) W_{m_{k+1}}(x) \left\{ \sum_{\nu=0}^{k+1} (2^{2\nu} - 1) \varphi_{2(k+1-\nu)}(t) r_{2(k+1-\nu)}(x) D_{2^{2(k+1-\nu)}}(t;x) \right\} =$$
$$= V_{k+1}(t;x).$$

Aus dem Hilfssatz II folgt noch, indem man (2. 13) berücksichtigt, daß für $0 \leqq n < 2^{2k}$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\left|V_k\left(t;\ \frac{n}{2^{2k}}\right)\right| = \frac{2}{3}\left|\sum_{\nu=0}^{k-1}(2^{2(k-\nu)}-1)\,\varphi_{2\nu}(t)\,r_{2\nu}\left(\frac{n}{2^{2k}}\right)D_{2^{2\nu}}\left(t;\ \frac{n}{2^{2k}}\right)\right| =$$

(2. 18)

$$= \frac{2}{3}\sum_{\nu=0}^{k-1}(2^{2(k-\nu)}-1)\,2^{2\nu} > \frac{2}{3}\sum_{\nu=0}^{k-1}2^{2k-1} = \frac{k\cdot 2^{2k}}{3} \quad (t\in H_n^{(2k-1)}).$$

Hilfssatz IV. *Die Ziffern $\omega^{(\nu)}(n, k)$ der dyadisch rationalen Zahl*

$$B_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{2^{2k}-1}\frac{\omega^{(\nu)}(n,k)}{2^{2^{2k}+\nu+1}} \quad (n=0,1,2,\ldots,2^{2k}-1;\quad k=1,2,3,\ldots)$$

seien folgendermaßen definiert:

$$\omega^{(\nu)}(n,k) = \begin{cases}1, & \text{für}\quad r_{2k}(A_\nu^{(k)} \dotplus A_n^{(k)} \dotplus A_{n\oplus\nu}^{(k)}) = -1,\\ 0, & \text{für}\quad r_{2k}(A_\nu^{(k)} \dotplus A_n^{(k)} \dotplus A_{n\oplus\nu}^{(k)}) = 1,\end{cases} \tag{2. 19}$$

wobei $n\oplus\nu$ die in (1. 5) definierte Summe der Zahlen n, $\nu(\in G_{2k})$ bezeichnet, ferner sei

$$C_n^{(k)} = A_n^{(k)} \dotplus B_n^{(k)},$$

$$q_n^{(k)}(t;x) = r_{2^{2k}+n}(x)\,\varphi_{2^{2k}+n}(t)\,r_{2k}(x)\,\varphi_{2k}(t)\,D_{m_{k-1}}(t;x) \tag{2. 20}$$

$$(n=0,1,2,\ldots,2^{2k}-1;\quad k=1,2,3,\ldots).$$

Dann gilt

$$\sum_{\nu=0}^{2^{2k}-1} q_n^{(k)}(t;C_\nu^{(k)}) = \varphi_{2^{2k}+n}(t)\,r_{2k}(A_n^{(k)})\,V_k\left(t;\ \frac{n}{2^{2k}}\right). \tag{2. 21}$$

Beweis von Hilfssatz IV. Aus der Definition der $B_n^{(k)}$ folgt

$$r_{2^{2k}+\nu}(B_n^{(k)}) = r_{2k}(A_n^{(k)} \dotplus A_\nu^{(k)} \dotplus A_{n\oplus\nu}^{(k)})$$

$$(n=0,1,2,\ldots,2^{2k}-1;\quad \nu=0,1,2,\ldots,2^{2k}-1;\quad k=1,2,3,\ldots),$$

woraus sich

$$r_{2^{2k}+n}(B_\nu^{(k)}) = r_{2k}(A_n^{(k)} \dotplus A_\nu^{(k)} \dotplus A_{n\oplus\nu}^{(k)}) \tag{2. 22}$$

mit aufwechseln der Indizes n und ν ergibt. Aus (2. 19) und (2. 20) schließen wir für $s<2^{2k}$: $r_s(C_n^{(k)}) = r_s(A_n^{(k)})$, also

$$D_l(t;x\dotplus C_n^{(k)}) = D_l(t;x\dotplus A_n^{(k)}) \qquad (l\leqq 2^{2^{k}}). \tag{2. 23}$$

Auf Grund von (1. 6) ergibt sich

$$A_n^{(k)} \dotplus A_\nu^{(k)} = \left(\frac{n}{2^{2k}} \dotplus \frac{\delta_n^{(k)}}{2^{2k+1}}\right) \dotplus \left(\frac{\nu}{2^{2k}} \dotplus \frac{\delta_\nu^{(k)}}{2^{2k+1}}\right) =$$

$$= \left(\frac{n}{2^{2k}} \dotplus \frac{\nu}{2^{2k}} \dotplus \frac{\delta_{n\oplus\nu}^{(k)}}{2^{2k+1}}\right) \dotplus \left(\frac{\delta_{n\oplus\nu}^{(k)}}{2^{2k+1}} \dotplus \frac{\delta_n^{(k)}}{2^{2k+1}} \dotplus \frac{\delta_\nu^{(k)}}{2^{2k+1}}\right) =$$

$$A_{n\oplus\nu}^{(k)} \dotplus \left(\frac{\delta_{n\oplus\nu}^{(k)}}{2^{2k+1}} \dotplus \frac{\delta_n^{(k)}}{2^{2k+1}} \dotplus \frac{\delta_\nu^{(k)}}{2^{2k+1}}\right),$$

woraus $r_s(A_n^{(k)} \dotplus A_\nu^{(k)}) = r_s(A_{n\oplus\nu}^{(k)})$ $(s<2k)$ folgt. Daraus erhalten wir

(2. 24) $$D_l(t; x \dotplus A_n^{(k)} \dotplus A_\nu^{(k)}) \doteq D_l(t; x \dotplus A_{n\oplus\nu}^{(k)}) \qquad (l \leqq 2^{2k}).$$

Mit Berücksichtigung von $r_{2^{2k}+n}(A_j^{(k)})=1$, bekommen wir auf Grund von (2. 20), (2. 22), (2. 23) und (2. 24):

$$q_n^{(k)}(t; x \dotplus C_\nu^{(k)} \dotplus A_n^{(k)}) =$$
$$= r_{2^{2k}+n}(x)\varphi_{2^{2k}+n}(t) r_{2k}(x)\varphi_{2k}(t) r_{2^{2k}+n}(B_\nu^{(k)}) r_{2k}(A_\nu^{(k)} \dotplus A_n^{(k)}) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_{n\oplus\nu}^{(k)}) =$$
$$= r_{2^{2k}+n}(x)\varphi_{2^{2k}+n}(t) r_{2k}(x \dotplus A_{n\oplus\nu}^{(k)})\varphi_{2k}(t) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_{n\oplus\nu}^{(k)}).$$

Da mit ν auch $n\oplus\nu$ die Gruppe G_{2k} $(=0, 1, 2, \dots, 2^{2k}-1)$ durchläuft, erhalten wir mit Berücksichtigung von (2. 13) und (2. 14)

$$\sum_{\nu=0}^{2^{2k}-1} q_n^{(k)}(t; x \dotplus C_\nu^{(k)} \dotplus A_n^{(k)}) =$$
$$= r_{2^{2k}+n}(x)\varphi_{2^{2k}+n}(t) \left\{ \sum_{\nu=0}^{2^{2k}-1} r_{2k}(x \dotplus A_{n\oplus\nu}^{(k)})\varphi_{2k}(t) D_{m_{k-1}}(t; x \dotplus A_{n\oplus\nu}^{(k)}) \right\} =$$
$$= r_{2^{2k}+n}(x)\varphi_{2^{2k}+n}(t) V_k(t; x).$$

Für $x = A_n^{(k)}$ ergibt sich (2. 21) auf Grund der Relationen $r_{2^{2k}+n}(A_n^{(k)})=1$ und

$$V_k(t; A_n^{(k)}) = V_k\left(t; \frac{n}{2^{2k}}\right) r_{2k}(A_n^{(k)}).$$

Damit haben wir den Hilfssatz IV bewiesen.

§ 3. Beweis des Lemmas

Es sei

(3. 1) $$P_k(t) = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\nu=0}^{2^{2k}-1} D_{2^{2^{2k}+1}}(t; C_\nu^{(k)}).$$

Dann bestehen a), b), c) auf Grund von (2. 4) und (2. 7), wobei $H_n^{(2k-1)}$ $(n=0, 1, 2, \dots$ $\dots, 2^{2k}-1)$ die Mengen bedeuten, die im Hilfssatz II und m_k durch (2. 12) definiert sind. Zum Beweis von d) beachten wir, daß auf Grund von (2. 3) und (2. 20)

$$S_{2^{2^{2k}}+n+m_k}(t; D_{2^{2^{2k}+1}}(t; x)) =$$
$$= D_{2^{2^{2k}}+n}(t; x) + r_{2^{2k}+n}(x)\varphi_{2^{2k}+n}(t) D_{2^{2k}}(t; x) + q_n^{(k)}(t; x)$$

gilt. Mit Berücksichtigung von (2. 21) und (3. 1) erhalten wir daraus:

(3. 2) $$S_{2^{2^{2k}}+n+m_k}(t; P_k) = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\nu=0}^{2^{2k}-1} D_{2^{2^{2k}}+n}(t; C_\nu^{(k)}) +$$
$$+ \frac{1}{2^{2k}}\varphi_{2^{2k}+n}(t) \sum_{\nu=0}^{2^{2k}-1} r_{2^{2k}+n}(C_\nu^{(k)}) D_{2^{2k}}(t; C_\nu^{(k)}) + \frac{1}{2^{2k}}\varphi_{2^{2k}+n}(t) r_{2k}(A_n^{(k)}) V_k\left(t; \frac{n}{2^{2k}}\right).$$

Wegen (2. 9) und (2. 23) gilt

$$D_{2^{2k}}(t;\, C_\nu^{(k)}) = D_{2^{2k}}(t;\, A_\nu^{(k)}) = D_{2^{2k}}\left(t;\, \frac{\nu}{2^{2k}}\right) = \begin{cases} 2^{2k}, & \text{wenn} \quad t \in H_\nu^{(2k-1)}, \\ 0, & \text{wenn} \quad t \notin H_\nu^{(2k-1)}. \end{cases}$$

Da die Mengen $H_\nu^{(2k-1)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2^{2k}-1)$ disjunkt sind, folgt

$$\frac{1}{2^{2k}} \left| \sum_{\nu=0}^{2^{2k}-1} \varphi_{2^{2k}+n}(t)\, r_{2^{2k}+n}(C_\nu^{(k)})\, D_{2^{2k}}(t;\, C_\nu^{(k)}) \right| \leqq 1 \qquad (t \in [0, 1]).$$

Da auf Grund von (2. 9), der Wert von $D_{2^{2^{k}+n}}(t;\, C_\nu^{(k)})$ auf einer Menge $F_{(k,n)}^{(\nu)}$ (vom Maß $1/2^{2^{2k}+n}$) gleich $2^{2^{2k}+n}$ ist, sonst aber verschwindet, bekommen wir, mittels der Gleichung (2. 13),

$$|V_k(t;\, x)| \leqq \frac{2}{3}\, k\, 2^{2k} \qquad (t \in [0, 1]).$$

Auf Grund von (2. 18) folgt aus (3. 2)

$$|S_{2^{2^{2k}+n}+m_k}(t;\, P_k)| \geqq \begin{cases} 2^{2^{2k}+n-2k} - \frac{2}{3}k - 1 > \frac{k}{3} - 1 & \left(t \in \bigcup_{\nu=0}^{2^{2k}-1} F_{(k,n)}^{(\nu)}\right), \\ \frac{k}{3} - 1 & \left(t \in H_n^{(2k-1)} - \bigcup_{\nu=0}^{2^{2k}-1} F_{(k,n)}^{(\nu)}\right). \end{cases}$$

Damit haben wir auch die Behauptung d) bewiesen.

§ 4. Beweis des Satzes

Es sei $\lambda_n = \varepsilon_n \log\log n$; wo wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß $\varepsilon_n \searrow 0$. Ferner sei $N_i = 2^{2^{2k_i+1}}$ $(k_1 < \ldots < k_i < \ldots)$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{N_i} < \infty$, und wir bilden die Reihe

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{N_i} \psi_{N_i}(t) P_{k_i}(t). \tag{4. 1}$$

Der höchste Index von $\psi_\nu(t)$ in $P_{k_i}(t)$ ist nicht größer als $N_i - 1$, so ist das i-te Glied der Reihe (4. 1) ein W-Polynom der Funktionen $\psi_\nu(t)$, wobei der kleinste Index mindenstens N_i, der größte aber höchstens $2N_i - 1$ ist. Da für jedes $i(=1, 2, 3, \ldots)$ $2N_i - 1 < N_{i+1}$ gilt, schließen wir, daß (4. 1) eine nach $\psi_\nu(t)$ fortschreitende (geklammerte) Reihe ist, und in den verschiedenen Gliedern die einzelnen Funktionen $\psi_\nu(t)$ höchstens je einmal vorkommen.

Aus den Eigenschaften b) und c) von $P_k(t)$ folgt, daß

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{N_i} \int_0^1 |\psi_{N_i}(t) P_{k_i}(t)|\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{N_i} \int_0^1 P_{k_i}(t)\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{N_i} < \infty.$$

Hieraus bekommen wir, daß die Reihe (4.1) fast überall gegen eine integrierbare Funktion $f(t)$ konvergiert. Weiter folgt auch, daß wir aus (4. 1) durch Weglassen der Klammern die Entwicklung der Funktion $f(t)$ nach dem System $\{\psi_\nu(t)\}$ bekommen.

Zum Beweis von (5) führen wir die folgenden Mengen ein:

$$R_i = \{t: t\in[0,1], P_{k_i}(t)>0\}, \qquad T = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty} R_i. \tag{4.2}$$

Im Falle $\nu\neq\nu'$ ist $D_{N_i}(t;C_\nu^{(k_i)})\,D_{N_i}(t;C_{\nu'}^{(k_i)})\equiv 0$ $(t\in[0,1])$, also besteht R_i aus 2^{2k_i} disjunkten Mengen, die alle das Maß N_i^{-1} besitzen, und für $t\in R_i$ ist $P_{k_i}(t)=\dfrac{N_i}{2^{2k_i}}$. Daraus folgt:

$$|T| = \lim_{j\to\infty}\left|\bigcup_{i=j}^{\infty} R_i\right| \leqq \lim_{j\to\infty}\sum_{i=j}^{\infty}\frac{2^{2k_i}}{N_i} = 0.$$

Zuerst zeigen wir, daß (5) für die Punkten von $S=[0,1]-T$, d. h. fast überall in $[0,1]$ besteht. Es sei $t\in S$. Dann gibt es, auf Grund von (4. 2), einen Index $i_0=i_0(t)$ derart, daß $t\notin R_i$ für $i>i_0$ ist, folglich gilt

$$S_{N_i}(t;f) = S_{2N_{i-1}}(t;f) = S_{2N_{i_0}}(t;f) \qquad (i>i_0). \tag{4.3}$$

Auf Grund der Eigenschaft (6) a) der Mengen $H_n^{(k)}$ kann man eine Indexfolge $n_i=n_i(t)$ eindeutig angeben, für die $0\leqq n_i\leqq 2^{2k_i}-1$, und $t\in H_{n_i}^{(2k_i-1)}$ $(i=1,2,3,\ldots)$ besteht. Es sei $M_i=M_i(t)=2^{2^{2k_i}+n_i(t)}+m_{k_i}$. Dann bekommen wir aus (4. 1), mittels (4. 3), daß für $i>i_0$

$$S_{N_i+M_i}(t;f) = S_{N_i}(t;f)+\varepsilon_{N_i}\psi_{N_i}(t)S_{M_i}(t;P_{k_i}) =$$

$$= S_{2N_{i_0}}(t;f)+\varepsilon_{N_i}\psi_{N_i}(t)S_{M_i}(t;P_{k_i})$$

gilt. Daraus folgt auf Grund von (6) d) für genügend große i,

$$\frac{|S_{N_i+M_i}(t;f)|}{\lambda_{N_i+M_i}} \geqq \frac{\varepsilon_{N_i}|S_{M_i}(t;P_{k_i})|-|S_{2N_{i_0}}(t;f)|}{\lambda_{N_i+M_i}} \geqq$$

$$\geqq \frac{\varepsilon_{N_i}\left(\dfrac{k_i}{3}-1\right)}{\varepsilon_{N_i+M_i}\log\log(N_i+M_i)}+o(1) \geqq \frac{\dfrac{k_i}{3}-1}{\log\log 2N_i}+o(1) > \frac{1}{12}.$$

Damit haben wir (5) für die Punkten von S bewiesen.

Es sei nun $t\in T$. Dann gibt es eine Folge $i_s=i_s(t)$ $(s=1,2,\ldots)$ für die $t\in R_{i_s}$ $(s=1,2,\ldots)$ gilt. Da die Folge λ_n nicht abnehmend und die Funktion $\dfrac{\log\log x}{\log x}$ für $x\geqq 4$ monoton abnehmend ist, gilt für $j<s$

$$\frac{\varepsilon_{N_{i_j}}}{\varepsilon_{N_{i_s}}} \leqq \frac{\log\log N_{i_s}}{\log\log N_{i_j}} \leqq \frac{\log N_{i_s}}{\log N_{i_j}} = \frac{2^{2k_{i_s}}}{2^{2k_{i_j}}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{|S_{2N_{i_s}}(t;f)|}{\lambda_{2N_{i_s}}} \geqq \frac{\varepsilon_{N_{i_s}} N_{i_s} 2^{-2k_{i_s}} - \sum_{j=1}^{s-1} \varepsilon_{N_{i_j}} N_{i_j} 2^{-2k_{i_j}}}{\varepsilon_{2N_{i_s}} \log\log 2N_{i_s}} \geqq$$

$$\geqq \frac{N_{i_s} 2^{-2k_{i_s}}}{\log\log N_{i_s}} \left(1 - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{N_{i_j} 2^{-4k_{i_j}}}{N_{i_s} 2^{-4k_{i_s}}}\right) \geqq \frac{N_{i_s} 2^{-2k_{i_s}}}{\log\log N_{i_s}} \left(1 - \frac{2^{4k_{i_s}}(s-1)}{2^{2^{2k_{i_s}}}}\right) \to \infty \quad (s \to \infty).$$

Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] G. Alexits, *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen* (Budapest, 1960).
[2] N. J. Fine, On the Walsh functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 372—414.
[3] A. N. Kolmogoroff, Une série de Fourier—Lebesgue divergente presque partout, *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 324—328.
[4] A. N. Kolmogoroff, Une série de Fourier—Lebesgue divergente partout, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **183** (1926), 1327—1328.
[5] E. Stein, On limits of sequences of operators, *Annals of Math.*, **74** (1964), 140—170.
[6] Yung-ming Chen, On Kolmogoroff's divergent Fourier series, *Archiv der Math.*, **14** (1963), 116—119.

(Eingegangen am 10. November 1966)